数理解析研究所講究録
93巻 1970年 76-85

Semigroups の収束性とその応用

早大，理工　洲之内 治男

§1 Abstract Cauchy problem と semigroups の収束

(1.1) $$\frac{du}{dt} = Au, \qquad u(0) = u_0$$

を Banach 空間 $\mathfrak{X}$ で考える．A は densely defined, closed l. op. とし core D （D は dense で，$\overline{A|_D} = A$）をもつとする．

これに差分近似を対応させる方法は，$\{A_n\}$ をつぎの意味で A を近似する有界作用素の列：

(1.2) $$A_n u \longrightarrow Au \quad , \; u \in D$$

（このとき，$\{A_n\}$ は A と consistent という）とし，

(1.3) $$\frac{du}{dt} = A_n u, \qquad u(0) = u_0$$

なる方程式の列を考える．(1.3) を (1.1) の (semi-discrete) difference scheme と呼ぶ．A_n は有界作用素だから，(1.3) の解 u_n は

$$(1.4) \qquad u_n(t) = \exp(tA_n)u_0 \equiv T_n(t)u_0$$

となり，$\{T_n(t)\,;\,t \geqq 0\}$ は unif. cont. semigroups の列となる。この semigrs の列が適当な条件の下に (1.1) の解に収束することがいえると，(1.1) は解けたことになる。このような議論は Trotter に始まる。かつ，Cauchy 問題の可解性は semigroups の列の収束性に帰着される。

定理 1. Consistency cond. の下で，(1.3) の解が，

$$(1.5) \qquad \sup \|\exp(tA_n)\| < \infty \qquad \text{for each } t > 0$$

$$\exists \gamma > 0\,;\ \sup \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|\exp(tA_n)u_0\|\, dt < \infty$$

$$(1.6) \qquad \underset{\lambda\to\infty}{s\text{-}\lim}\ \lambda R(\lambda; A_n) = I, \qquad \text{unif. in } n,$$

$$(1.7) \qquad \rho(A) \cap \{\lambda\,;\, \mathrm{Re}\,\lambda > \gamma\} \neq \phi$$

$\Rightarrow$ $u_n(t) = T_n(t)u_0 \longrightarrow u(t) = T(t)u_0$，しかも $\{T(t)\,;\,t>0\}$ は $(0,A)$-semigr. になり，しかも，つぎの意味で (1.1) の解である：

$$\frac{d\,T(t)u}{dt} = A\,T(t)u,$$

$$\lim_{t\to 0+} T(t)u = u \qquad \text{for } u \in \mathcal{D}(A).$$

(1.5) の代りに，

$$(1.5^\circ) \qquad \sup \|\exp(tA_n)\| \leqq M e^{\omega t}$$

$\Rightarrow$ $\{T(t)\}$ は (C_0)-semigroup になる。

証明は，大春-洲之内[4].

ここで，semigroup $\{T(t)\}$ のいくつかの class を上げておく．有界線形作用素の族 $\{T(t)\ ;\ t>0\}$ が一般に semigroup を作るとは，

$$T(t)\,T(s) = T(t+s)\,, \qquad t, s > 0 \tag{1.8}$$

$$\lim_{t\to t_0} T(t)x = T(t_0)x\,, \qquad t_0 > 0 \tag{1.9}$$

をいう．このとき，type $\omega_0 = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\|$ が定まる．

Semigr. $\{T(t)\}$ が class (A) とは，$X_0 = \bigcup_{t>0} T(t)[X]$ が X で dense で，$\exists\,\omega_1 > \omega_0\,;\ \forall\lambda\,;\ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1$ に対し，bd. l. op. $R(\lambda)$ が定義され，

(a) $\qquad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)x\,dt\,, \qquad x \in X_0\,,$

(b) $\qquad \sup_{\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_1} \|R(\lambda)\| < \infty$

(c) $\qquad s\text{-}\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda) = I.$

さらに，

(d) $\quad \int_0^1 \|T(t)x\|\,dt < \infty$，　または，(d′) $\int_0^1 \|T(t)\|\,dt < \infty$

のとき，それぞれ $(0, A)$，または $(1, A)$-class という．

abstract Cauchy problem (1.1) が定理 1 の意味で解けるとき，$(0, A)$-well-posed，(C_0)-well-posed ということにする．するともっと一般に，semi-group の意味で well-posed が定義できる．

たとえば，$u_0 \in D$ (A の core) に対し，唯一つの genuine solution $u(t) = T(t)u_0$ が存在し、 $\|T(t)u_0\| \leq M_t \|u_0\|$ となるとき、この $\{T(t)\}$ の全空間への拡張は semigr. となることがいえる。すなわち、(1.1) は S.G. well-posed になる。(genuine sol. $u(t)=u(t,u_0)$ とは、A.C., cont. diff. で、$u(t) \in \mathcal{D}(A)$ で、 $\frac{du}{dt} = Au(t)$, $t>0$, $u(t,u_0) \to u_0$ $(t \to 0)$)

§2. Semi-discrete difference scheme の収束.

上の定理 1 は、Cauchy 問題の well-posed までもすこため複雑だったが、

定理 2. Cauchy 問題 (1.1) が $(0, A)$-well-posed (or (C_0)-), その type を ω_0 とするとき、consistent な difference scheme (1.3) が stability cond.

(2.1) $\exists \gamma (>\omega_0);\ L>0;\quad \|R(\lambda; A_n)\| \leq L \quad \text{for } Re\,\lambda > \gamma,$

(2.2) $\sup_n \|\exp(tA_n)\| < \infty \quad , \quad t>0$

$\Rightarrow \quad u_n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{for } t>0.$

この条件は比較的見やすい。

たとえば、定数係数の偏微分方程式

(2.3) $$\frac{du}{dt} = P(D)\,u, \qquad u(0) = u_0$$

を $L^2(\mathbb{R}^d)$ で考えてみる。 $u \in L^2$ の Fourier 変換を $\hat{u}(\xi)$ で表わすと、(2.3) は

(2.4) $$\frac{d\hat{u}}{dt} = P(\xi)\,\hat{u}(\xi, t), \qquad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0.$$

いま，$\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$ の差分近似として，中心差分

$$\frac{\delta u_j}{\partial x_k} = \frac{u_j(x+h_k e_k) - u_j(x-h_k e_k)}{2h_k}$$

（e_k は第 k 単位ベクトル）をとることにし，(2.3) の D をこの中心差分でおきかえたものの Fourier 変換をとると，

$$(2.5) \qquad \frac{d\hat{u}}{dt} = P(\xi(h))\,\hat{u}(\xi,t), \qquad \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0 ,$$

$\xi(h) = (\xi_1(h), \ldots, \xi_d(h)) = \left(\sin(h_k\xi_k)/h_k \right)$ となる.

(2.5) の解は，

$$\hat{u}_h(t,\xi) = \exp(tP(\xi(h)))\,\hat{u}_0(\xi) \equiv \exp(tA_h)\,\hat{u}_0(\xi).$$

ところで，$|\xi| \leq \pi/2h$ に対し，$|\xi|/2 \leq |\xi(h)| \leq |\xi|$ だから，

$$\sup_{\xi(h)} |(\lambda I - P(\xi(h)))^{-1}| \leq \sup_{\xi} |(\lambda I - P(\xi))^{-1}|,$$

$$\sup_{\xi(h)} |\exp(tP(\xi(h)))| \leq \sup_{\xi} |\exp(tP(\xi))|$$

となり，これは (2.1)，(2.2) の条件である．よって，

定理3．定数係数の Cauchy 問題 (2.3) が $L^2(\mathbb{R}^d)$ で $(0,A)$-，または (C_0)-well-posed とすると，つねに，解に収束する difference schemes が存在する．

§3. 例と微分可能性についての comment.

$L^2(R)$ で定数係数の Cauchy 問題を考える。Fourier 変換をとって (2.4) の形にしたとき、

$$(3.1)\qquad P(\xi) = \begin{pmatrix} -\xi^2 + i\xi^4 & \xi^\beta \\ & -\xi^2 + i\xi^4 \end{pmatrix}$$

になるとしよう。これは exponent $h = 2$ の (Shilov の意味の) parabolic eq. である。

$$(3.2)\qquad \exp(tP(\xi)) = \begin{pmatrix} \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) & t\xi^\beta \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) \\ & \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) \end{pmatrix}$$

だから、$\sup_\xi |\exp(tP(\xi))| < \infty$, for each $t > 0$, よって S.G.-well-posed.

$$(3.3)\qquad R(\lambda; P(\xi)) = \begin{pmatrix} 1/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4) & \xi^\beta/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4)^2 \\ & 1/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4) \end{pmatrix}$$

よって、 $\beta > 8 \Rightarrow$ $P(\xi)$ の resolvent set $= \phi$,

$\beta \leqq 4 \Rightarrow$ $(0, A)$-well-posed,

$\beta \leqq 2 \Rightarrow$ (C_0)-well-posed (Kreiss の matrix th. より)

$5 \leqq \beta \leqq 8 \Rightarrow$ (A)-~~semigr.~~ well-posed ではないが、スペクトルは、

$\lambda = -\xi^2 + i\xi^4$. よって、sector $\Sigma = \{\arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \theta_0\}$ を含み、

そこで、

$$(3.4)\qquad |\lambda|\, \| R(\lambda; P(\xi)) \| \leqq P(|\lambda|) \qquad P \text{ は多項式.}$$

このとき，Lagnese[2]は，

$$T(t)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda; A) x \, d\lambda$$

で定義すると，$\{T(t)\}$ は semigr. を作り，しかも，$T(t)x$ は t に関し無限回微分可能で，

$$\frac{d^n T(t)x}{dt^n} = A^n T(t) x$$

をみたすことを示している．実際は，Agmon-Nirenberg[1]の考えた方程式の解の存在を示すのが目的．

なお，semigr. の微分可能性の問題は $(C_0)/((0,A))$ のとき，Pazy[5]で解決されている．

§4. Perturbation.

宮寺[3]で，$\{T(t)\}$ を $(1,A)$-semigr.，A をその generator とするとき，perturbed op. B が，$\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ で，

i) 有界作用素 B_n; $B_n x \longrightarrow Bx$, $x \in \mathcal{D}(A)$,

ii) $\sup \int_0^1 \| B_n T(t) \| dt < \infty$

$\Rightarrow$ $A + \varepsilon B$ は $(1,A)$-semigr. を生成する，という定理を示し，その証明で，semigr. の perturbation は本質的に，

1) B が有界作用素のときの perturbation と，

2) semigr. の列の収束性

からなることを示した。いま，$(0, A)$-，あるいは (A)-semi-gr. で収束性がいえているから，1) がいえれば，(A)-semigr. に対しても同様な形の perturbation がいえるはずであるが，いまの所これがわからない。

さて，大体 (C_0)-semigr. の perturbation に相当する差分法の perturbation として，つぎの問題を考える。

Cauchy 問題 $\frac{du}{dt} = Au$, $u(0) = u_0$ は (C_0)-well posed,

$$u((m+1)h_n) = C_n u(mh_n), \quad u(0) = u_0$$

なる difference scheme は stable で，その解 $u_n([t/h_n]h_n) \to u(t)$ とする。Perturbed eq.

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu, \quad u(0) = u_0 \tag{4.1}$$

を考えるとき，B に consistent な差分近似 B_n をとるとき，C_n, B_n より (4.1) の stable scheme が作れるか。

定理. B を (unbd.) l. op. で，$\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$, B と consistent な $\{B_n\}$ が，十分大きい λ に対し

$$N_\lambda = \sup_{\|u\|=1} \sup_n h_n \sum_{j=1}^{T_n} \exp(-\lambda j h_n) \|B_n C_n^j u\| < 1 \tag{4.2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} u_n(h_n) &= C_n u \\ u_n(mh_n) &= \left(C_n (I + h_n B_n) \right)^{m-1} C_n u, \quad m \geq 2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

なる scheme は (4.1) の解に収束する。

これは宮寺の定理の difference analogy.

この応用として, parabolic eq. に低次の項をつけ加えることを考えてみる.

$$\frac{du}{dt} = P(D)u + Q(D)u,$$

$u' = P(D)u$ は (Petrowski の意味で) parabolic, order $2p$, $Q(D)$ の order $q < 2p$ とする. このとき, Aronson 等により, $P(D)$ と consistent, stable な parabolic difference scheme (amplification matrix の固有値を ρ_i とすると, $|\rho_i| \leqq 1 - \delta' |\xi|^{2p}$ をみたすもの) が存在することがわかっている. このとき, $Q(D)$ と consistent なものとして, D を 1 階の difference operator Δ で近似することとすると, 上の (4.2) を満足することがいえる. これは,

$$\| \Delta^q C_n^j u_0 \| \leq C_q \cdot ((j+1)h_n)^{-q/2p} \| u_0 \| \qquad (q < 2p)$$

より,

$$h_n \sum_{j=1}^{T_n} \exp(-\lambda j h_n) \| B_n C_n^j u_0 \| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-q/2p} \| u_0 \| dt \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

による.

なお, Thomée [7] による L^2 での parabolic difference scheme では perturbation of lower order terms に関し stable なことがいえる. (このときは, Shilov の意味で parabolic, (C_0)-well-posed のときも, 微分方程式のときと同じことまでいえる.)

文 献

[1] Agmon -Nirenberg: Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, C.P.A.M. 16(1963) 121-239

[2] Lagnese: On equations of evolution and parabolic equations of higher order in t, to appear.

[3] Miyadera: Perturbation theory for semigroups of operators, 数学 20(1968) 14-25

[4] Oharu and Sunouchi: On the convergence of semigroups of linear operators, J. Funct. Analysis, to appear.

[5] Pazy: On the differentiability and compactness of semigroups of linear operators, J. Math. Mechn. 17(1968) 1131-1141

[6] Sunouchi: Perturbation theory of difference schemes, Num, Math. 12(1968) 454-458

[7] Thomée: Parabolic difference operators, Math. Scand. 19(1966) 77-107

[8] Thomée: Stability theory for partial difference operators, SIAM Review 11(1969) 152-195